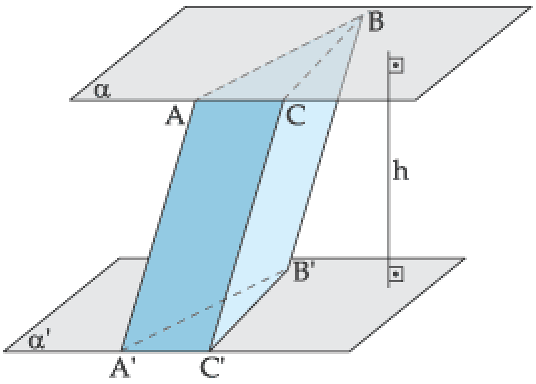
Prismas

Definição e Elementos

Prisma é um poliedro convexo tal que duas faces são polígonos congruentes situados em planos paralelos e as demais faces são paralelogramos.



Nomenclatura e Classificação

Os prismas recebem nomes de acordo com os polígonos das bases.

Assim,

• um prisma é triangular quando suas bases são triângulos;

• um prisma é quadrangular quando suas bases são quadriláteros;

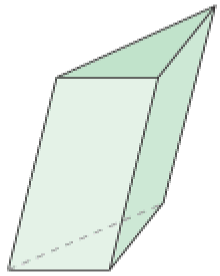
• um prisma é pentagonal quando suas bases são pentagonais;

• um prisma é hexagonal quando suas bases são hexagonais.

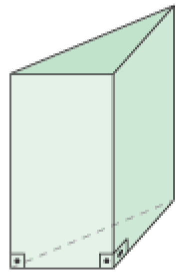
Quando as arestas laterais de um prisma forem perpendiculares aos planos das bases, o prisma é chamado de **reto**; caso contrário, de **oblíquo**.

Os prismas retos cujas bases são **polígonos regulares** são chamados de **prismas regulares**.

Exemplos

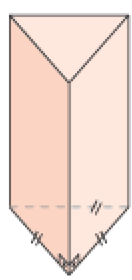


Prisma triangular oblíquo

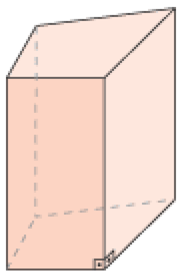


Prisma triangular reto

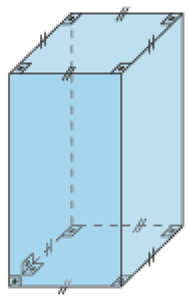
Prismas regulares



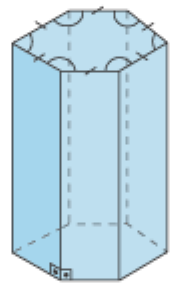
Prisma triangular regular



Prisma quadrangular reto



Prisma quadrangular regular

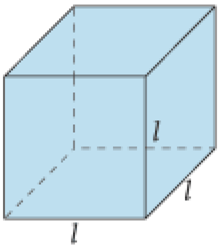


Prisma hexagonal regular

Cubo

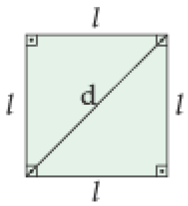
Definição e Elementos

Cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas. O cubo é um prisma quadrangular regular cuja altura é igual à medida da aresta da base.



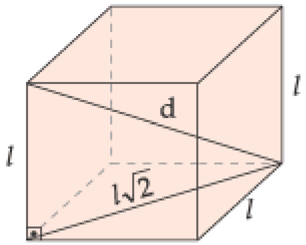
O cubo da figura tem arestas de medida *l*, então,

• as diagonais de suas faces medem $l\sqrt{2}$, pois são diagonais de quadrados de lados com medidas iguais a *l*.



$d = l\sqrt{2}$

• as diagonais do cubo medem $l\sqrt{3}$, pois:



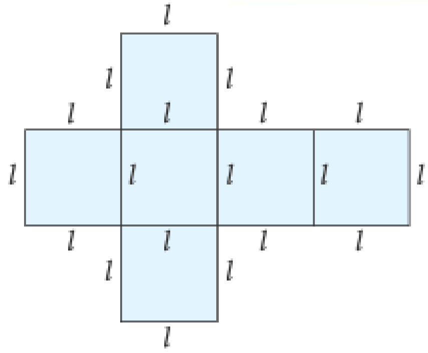
$$d^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 = 3\,l^2$$

Assim: $\boxed{d = l\sqrt{3}}$

Área Total

A área de um quadrado de lado *l* é l^2, então a área A da superfície de um cubo de aresta *l* é:

$$\boxed{A = 6l^2}$$



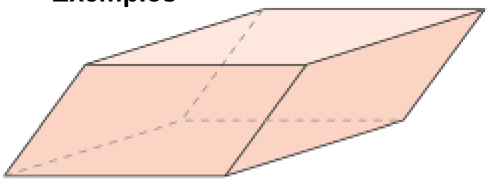
Cubo planificado

Paralelepípedos

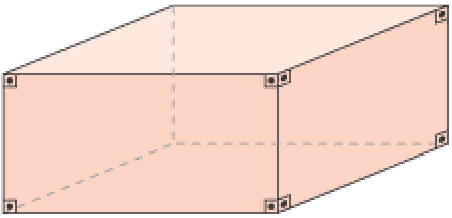
Definição

Chamamos de paralelepípedo o prisma cujas bases são paralelogramos; dessa forma, todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

Exemplos

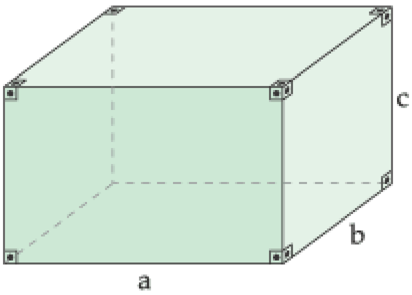


Paralelepípedo oblíquo



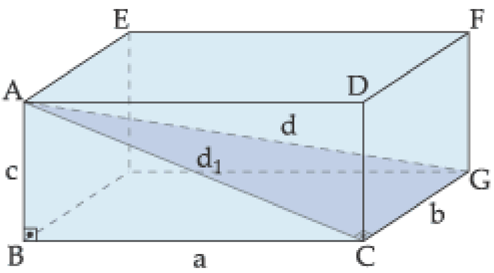
Paralelepípedo reto

Paralelepípedo Reto Retângulo



Diagonais de um paralelepípedo retângulo

No paralelepípedo da figura com dimensões a, b e c, sejam d_1 e d, as diagonais da face ABCD e do paralelepípedo, respectivamente.



No triângulo ABC, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
ou então,

$$\boxed{d_1^2 = a^2 + c^2}$$

No triângulo ACG, temos:
$AG^2 = AC^2 + CG^2$

ou então,

$$\boxed{d^2 = d_1^2 + b^2}$$

Como $d_1^2 = a^2 + c^2$, temos:
$d^2 = a^2 + c^2 + b^2$ ou

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

Área total (A_T) de um paralelepípedo retângulo

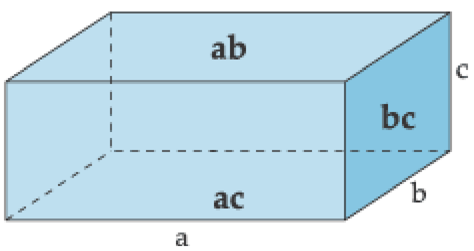
Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, as áreas de cada par de faces opostas são: ab, ac e bc.

Assim,

$$\boxed{A_T = 2ab + 2ac + 2bc}$$

Ou

$$\boxed{A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$



Volume (V) de um paralelepípedo retângulo

Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo retângulo, temos:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

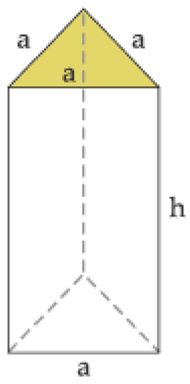
Área e Volume de Prismas Regulares

Sabemos que um prisma é chamado de regular quando é reto e tem base regular.

Vamos calcular a área e o volume dos principais prismas regulares:

Prisma Triangular Regular

Consideremos um prisma triangular regular com aresta da base **a** e altura **h**.



Área da base (B)

$$B = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Área lateral (A_L)

$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}}$

$A_L = 3 \cdot (ah) = 3\,ah$

Área total (A_T)

$A_T = A_L + 2B$

$$A_T = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Volume (V)

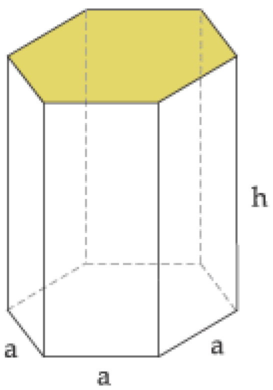
$$\boxed{V = S \cdot h}$$

V = B · h

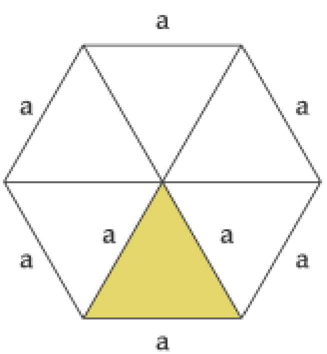
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Prisma Hexagonal Regular

Consideremos um prisma hexagonal regular com aresta da base **a** e altura **h**.



Área da base (B)



$$B = 6 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) \qquad B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Área lateral (A_L)

$A_L = 6 \cdot A_{\text{face lateral}}$

$A_L = 6\ (ah) = 6\ ah$

Área total (A_T)

$A_T = A_L + 2B$

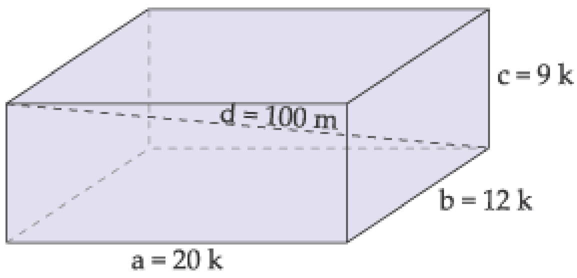
$$A_T = 6ah + 2 \cdot \left(\frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$$

Volume (V)

V = B · h

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

Exemplo: (VUNESP) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que suas dimensões são proporcionais a 9, 12 e 20, e que a diagonal mede 100 m.



Resolução

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$100^2 = (20k)^2 + (12k)^2 + (9k)^2$

$100^2 = 625k^2$

Assim, $25k = 100 \Rightarrow k = 4$

Então, $a = 20 \cdot 4 = 80\ m$

$b = 12 \cdot 4 = 48\ m$

$c = 9 \cdot 4 = 36\ m$

$V = a \cdot b \cdot c = 80 \cdot 48 \cdot 36$

$$\boxed{V = 138\ 240\ m^3}$$