**Matemática PA e PG**

**Definição**

As P.A.s (Progressões Aritméticas) são sequências nas quais cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado de uma constante. Chamamos esta constante de **razão** da P.A.



Como consequência da definição, para encontrarmos a razão de uma P.A., basta calcularmos a diferença entre um termo e seu antecessor:



Para que possamos construir a P.A., basta termos um termo qualquer da P.A. e sua razão, pois, a partir disso, é possível descobrirmos todos seus outros termos.

**Classificação das P.A.s**

* **Crescente**: uma P.A. é crescente quando a razão  for positiva;
* **Constante**: uma P.A. é constante quando a razão  for ;
* **Decrescente**: uma P.A. é decrescente quando a razão  for negativa.

**P.A. - Termo Geral**

Dada uma P.A. de termo  e razão , podemos calcular o valor do termo  da P.A. através da fórmula do **termo geral**:



**Para 3 termos**



**P.A. - Soma de Termos Equidistantes**

**Soma de termos equidistantes dos extremos**

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos.



Numa PA, os termos opostos, ou equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância do termo central da PA, têm a mesma soma....



**Termos consecutivos**

Considerando-se três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



**P.A. - Soma dos N Termos de uma P.A.**

A soma dos n termos de uma P.A. pode ser calculada por:



**Progressão Geométrica (PG)**

***Definição*** : **Progressão geométrica** éuma [**sequência numérica**](https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sequencia-numerica.htm) que possui uma razão fixa *q* e, a partir do primeiro termo, **os termos são cálculos pela razão *q* vezes o seu antecessor**. Uma progressão geométrica pode ser crescente, quando sua razão for maior que um; decrescente, quando a razão for um número entre zero e um; constante, quando a razão for exatamente um; e oscilante, quando a razão for menor que zero.

Essa sequência pode ser finita, quando há limitação de termos na sequência, ou infinita, caso ocorra exatamente o contrário. A equação do termo geral de uma progressão geométrica e a [**soma de todos os seus termos**](https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm) são calculadas a partir de fórmulas específicas, que dependem do primeiro termo e da razão.

Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que, após o primeiro termo, os termos posteriores da sequência são construídos a partir da **multiplicação de uma razão *q* pelo termo antecessor**.

**Exemplos**:

PG de razão 3 em que o primeiro termo é 2.

Os termos da sequência são representados por (a1, a2, a3, a4, a5 …).

a1 = 2

a2 = 2.3 = 6

a3 = 6.3 = 18

a4 = 18.3 = 54

a5 = 54.3 = 162.

A PG do exemplo é, portanto, (2,6,18,54,162...).

A **razão de uma PG** pode ser encontrada a partir da[**divisão**](https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/divisao.htm) **de um termo da sequência pelo seu antecessor**. Ao fazer isso, caso ela seja realmente uma progressão geométrica, essa divisão sempre será igual a *q*.

**Exemplo**:

(1, 2, 4, 8, 16, 32)



Logo, essa PGpossui razão *q* = 2.

**1ª propriedade**

Devido ao comportamento da PG, ela preserva algumas propriedades. A primeira delas é que o [**produto**](https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/multiplicacao-numeros-naturais.htm) de termos equidistantes do extremo é sempre igual.

Exemplo:

(2, 8, 32, 128, 512, 2048)

2∙ 2048= 4096

8∙512 = 4096

32 ∙128 = 4096

Quando a PG possui uma quantidade [**ímpar**](https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/como-identificar-se-um-numero-par-ou-impar.htm) de termos, há um **termo central**. Esse termo ao quadrado também é igual ao produto dos termos equidistantes.

**Exemplo:**

(1, 2, 4, **8**, 16, 32, 64)

1∙ 64 = 64

2∙32 = 64

4∙16 = 64

8∙8 = 64

**Classificação de uma PG**

Uma PG pode ser classificada como finita, quando existir uma qualidade limitada de termos, ou infinita. Além disso, também classificamos a PG de acordo com seu comportamento, podendo ser crescente, decrescente, constante e oscilante. Essa classificação depende diretamente da razão q.

* **Crescente**: Para que ela seja crescente, o segundo termo deve ser maior que o primeiro e assim sucessivamente, ou seja, a1 < a2 < a3 < a4 < … < an. Uma PG é crescente se, e somente se, a razão for maior que um, ou seja, q > 1. Exemplo: (2, 10, 50, 250, …), q = 5, logo a PG é crescente.
* **Constante**: Para que ela seja constante, os termos precisam ser todos iguais: a1 = a2 =...= an. Uma PG é constante se, e somente se, a razão for igual a 1, ou seja, q = 1. Exemplo: (2, 2, 2, 2, 2, 2), q = 1, logo a PG é constante.
* **Decrescente**: Para que ela seja decrescente, o segundo termo deve ser menor que o primeiro e assim sucessivamente, ou seja, a1 > a2 > a3 > a4 > … > an. Uma PG é decrescente se, e somente se, a razão for um número entre zero e um, ou seja, 0 > q > 1.

Exemplo:





**Exercícios sobre P.A.**

**EXERCÍCIOS SOBRE O ASSUNTO**

**Questão 01** – Na sequência 2, 6, 10, ... determine o 10º termo?

**Questão 02** - Determine o 20º elemento e a soma dos termos da seguinte progressão aritmética: (2, 7, 12, 17,...).

**Questão treino:** Determine quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1 000.

**Resposta:**

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for igual a um número múltiplo de 9. Então a progressão deve começar a partir do 108, que é o primeiro número divisível por 9, e terminar no número 999. Dessa forma, temos que o primeiro termo é igual a 108, o último termo igual a 999 e a razão será 9.

an = a1 + (n – 1) \* r

999 = 108 + (n – 1) \* 9

999 = 108 + 9n – 9

999 – 108 + 9 = 9n

9n = 900

n = 900/9

n = 100

**Entre os números 100 e 1000 existem 100 múltiplos de 9.**

**Questão 03** - Encontre o termo geralda progressão aritmética (PA) abaixo:

**A = (3, 7, ...)**

**Resolução 3:**

Apesar de a sequência apresentar apenas dois elementos, já podemos destacar dois termos importantes. Temos o primeiro elemento (**a1 = 3)** e ainda a razão, que é dada pela diferença de um termo pelo termo imediatamente anterior. Portanto, a razão **r** é dada por **r = 7 – 3 = 4**. Dessa forma, é possível determinar a fórmula de seu termo geral:

**an = a1 + (n – 1).r**
**an = 3 + (n – 1).4**
**an = 3 + 4n – 4**
**an = 4n – 1**

Então, o termo geral da PA (3, 7, …) é **an = 4n – 1**.

**Questão 04** - A soma dos 20 termos de uma PA é 500. Se o primeiro termo dessa PA é 5, qual é a razão **r** dessa PA?

**Resolução 4:**

As informações das quais dispomos são que **n = 20, Sn = 500 e a1 = 5**. Vamos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética para encontrar o último termo dessa sequência:

**Sn = (a1 + an) . n**
 **2**
**500 = (5 + a20) . 20**
 **2**

**500 . 2= (5+ a20) . 20**

**1000 = 100+ 20 . a20**

**1000 – 100 = 20 . a20**

**900 = 20 . a20**

**a20 = 900**
 **20**

**a20 = 45**

Vamos agora utilizar a fórmula do termo geral para encontrar o valor da razão **r**:

**an = a1 + (n – 1) . r**
**45 = 5 + (20 – 1) . r**
**45 – 5 = 19 . r**
**r = 40 ≈ 2**
**19**

Portanto, a razão dessa PA é de aproximadamente **2 cm.**

**Questão 05 -** Um jardim tem uma torneira e dez roseiras dispostas em linha reta. A torneira dista **50 m** da primeira roseira e cada roseira dista **2 m** da seguinte. Um jardineiro, para regar as roseiras, enche um balde na torneira e despeja seu conteúdo na primeira. Volta à torneira e repete a operação para cada roseira seguinte. Após regar a última roseira e voltar à torneira para deixar o balde, ele terá andado?

**Resolução 05**

Para regar a primeira roseira, o jardineiro está próximo à torneira e precisa andar 50 m para chegar à roseira e outros 50 m para retornar à torneira, andando nesse primeiro momento **100 metros**.

Novamente, o jardineiro sairá de próximo da torneira e andará 50 m até a primeira roseira e mais dois metros até a segunda roseira para então retornar, andando assim outros 52 metros de volta, o que totaliza **104 metros** de caminhada.

Para regar a terceira roseira, o jardineiro fará o mesmo percurso que acabara de fazer com o acréscimo de dois metros na ida e dois metros na volta, em decorrência da distância entre a segunda e a terceira roseira, totalizando **108 metros** de percurso.

O trajeto percorrido pelo jardineiropode ser considerado uma progressão aritmética de razão 4, observe:

**A10 = (100, 104, 108, …, a10)**

Vamos identificar o último termo dessa sequência, que corresponde ao trajeto do jardineiro ao regar a décima roseira. Utilizaremos a fórmula do termo geral para encontrar o **a10**.

**an = a1 + (n – 1).r**
**a10 = a1 + (10 – 1).r**
**a10 = 100 + 9.r**
**a10 = 100 + 9.4**
**a10 = 100 + 36**
**a10 = 136**

Se queremos saber o percurso total percorrido pelo jardineiro, podemos calcular a soma dos termos dessa progressão aritmética:

**S10 = (a1 + a10).10**
 **2**

**S10 = (100 + 136).10**
 **2**

**S10 = 236.5**

**S10 = 1.180**

Portanto, o percurso total feito pelo jardineiro é **1.180 m.**

**Exercício Sobre PG**

**EXERCÍCIOS SOBRE O ASSUNTO**

**01** - A sequência seguinte é uma progressão geométrica, observe: (2, 6, 18, 54...). Determine o 8º termo dessa progressão.

**Resolução 1**

Razão da progressão: 6 : 2 = 3

an = a1 \* q n –1
a8 = 2 \* 3 8 – 1
a8 = 2 \* 3 7
a8 = 2 \* 2187
a8 = 4374

**02** - Sabendo que uma PG tem a1 = 4 e razão q = 2, determine a soma dos 10 primeiros termos dessa progressão.

**Resolução 02**



**03** - Um carro, cujo preço à vista é R$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4 000,00 e a quarta parcela de R$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

an = a1 \* q n–1

a2 = 4000
a4 = 1000

a2 = a1 \* q
4000 = a1 \* q
a1 = 4000 / q

a4 = a1 \* q3
1000 = 4000 / q \* q3
1000 / 4000 = q3 / q
1 / 4 = q2
√1/4 = √q2
q = 1/2

a1 = 4000 / 1/2
a1 = 4000 \* 2
a1 = 8000

1ª prestação: R$ 8 000,00
2ª prestação: R$ 4 000,00
3ª prestação: R$ 2 000,00
4ª prestação: R$ 1 000,00
5ª prestação: R$ 500,00

Soma total das prestações: R$ 15 500,00

Entrada (valor do carro menos o total das prestações)

R$ 24 000,00 – R$ 15 500,00 = R$ 8 500,00

O valor da entrada foi de R$ 8 500,00